quella fiamma del vero, che risplende ai suoi occhi veggenti; poichè alla fine quell'*idea sperimentale,* con cui moviamo alla nostra battaglia coll'ignoto, non è altro che un raggio di vera poesia, un presentimento luminoso di ciò che è sepolto nel mistero.

---

20)

R. Acc. di scienze, lettere ed arti di Padova, Atti 10, 1893-94, pp. 195-216

20

OSSERVAZIONI SUI PRINCIPII DELLA GEOMETRIA

DEL SOCIO EFFETTIVO

Prof. GIUSEPPE VERONESE

Offro all'Accademia un esemplare dei *Fondamenti di Geometria* che l'ing. Adolfo Schepp, primo luogotenente nell'esercito germanico, finì a questi giorni di tradurre in tedesco; e aggiungo qualche parola sulla natura del problema scientifico dei principî di questa scienza, sull'indole, sul metodo e sui risultati principali dell'opera mia. Ne tratto già nella prefazione, ma è bene riparlarne in altro modo anche a difesa del libro (1).

Nel 1881 pubblicai nei Math. Annalen uno scritto sulla geometria a più di tre dimensioni: e mettendo intanto da parte altri studî dei quali avevo dato saggio anche in altre pubblicazioni e che altri geometri, il più italiani, proseguirono da dieci anni, volli riempire le lacune che c'erano nelle prime pagine della mia memoria stabilendo i principî della ipergeometria pura; la quale è una scienza che sta da sè, e la cui importanza non consiste solamente (come alcuni vorrebbero ancora) negli aiuti che dà e può dare alla geometria ordinaria. E così ho dovuto discutere i principî di tutta la geometria e anzi della matematica pura in generale.

Per *postulato* intendesi astrattamente parlando una proposizione logicamente possibile e indimostrabile colle premesse.

(1) Per la traduzione rilessi attentamente le parti principali del trattato correggendo gli errori di stampa sfuggiti nell'originale, tolsi qualche cosa e qualche cosa aggiunsi tentando che il libro fosse e paresse migliore, pur non avendo alcun dubbio sull'esattezza dei concetti sui quali posa l'opera mia e delle loro conseguenze.

Ringrazio anche qui il sig. Schepp per la molta diligenza posta nella traduzione, e l'editore G. B. Teubner per l'accuratezza veramente esemplare della stampa.

Da questo carattere del postulato scaturisce il problema scientifico dei principî della matematica pura, che può essere formulato brevemente così:

A - *Dato un sistema completo di postulati A, B, C, D ecc. per le forme* (grandezze) *matematiche astratte o per una loro classe, quale siasi di questi contraddice ad alcuno degli altri? Se no, ne è dipendente, ossia può esso, o la sua proposizione contraria, dedursi dai rimanenti?*

E se un postulato per es. D, è indipendente dagli altri, sostituendovene un altro D_1, *ma pur possibile coi rimanenti* (chè altrimenti D non sarebbe da questi indipendente), *qual'è il sistema di proprietà che ne derivano?*

E qui intendo parlare di postulati *semplici;* vale a dire che non si scompongono in parti e si riferiscono ciascuno ad un unico e semplice oggetto. Ad esempio quello comunemente dato per la determinazione della retta mediante una coppia qualunque dei suoi punti distinti, il quale ha pure un carattere unico e sembra semplice, ne contiene invece infiniti, tanti cioè quante sono le coppie dei punti distinti della retta quando si riguarda il postulato applicato ad una coppia diverso dal postulato applicato ad un'altra coppia (1).

La questione dunque non consiste tanto nel dare un minor numero di postulati quanto nel dare dei postulati semplici indipendenti e sufficienti. Ed anche se è utile darne la soluzione rispetto ad un sistema di postulati qualunque, essa sarà tanto più completa quanto più saranno semplici i postulati.

Per caratterizzare la geometria bisogna aggiungere:

assiomi
ipotesi

B - *Condizione essenziale della geometria è l'intuizione spaziale; vale a dire i postulati geometrici devono esprimere proprietà intuitive o tali che non contraddicano logicamente a quelle intuitive necessarie a definire la forma corrispondente al campo della nostra osservazione esterna* (2).

Ed invero quando il postulato D è indipendente dagli altri, gli può essere sostituito in senso puramente matematico un altro

(1) Vedi pag. 211-(17) IV.

(2) Nel primo caso i postulati li chiamo anche *assiomi* e nel secondo *ipotesi.*

non siamo al puro formalismo → c'è intuizione spaziale e carattere fissare in modo unico la geometria

S

postulato D_1. Ma geometricamente non basta: bisogna che esso soddisfi altresì alla condizione B: se no sarebbe lecito chiamare geometria la scienza di ogni varietà di oggetti. Per esempio l'ipotesi che in una varietà di elementi i sistemi che godono in sè i caratteri della retta non siano determinati mai da due elementi ripugnerebbe all'intuizione spaziale, perchè nel campo delle attuali nostre osservazioni vediamo l'oggetto rettilineo individuato dai suoi estremi.

Dunque acciò vi sia oggetto veramente geometrico la condizione B deve essere soddisfatta. E non si tratta già di solo metodo, perchè i risultati così ottenuti riguardano l'essenza della geometria e non mutano col mutare dei metodi. A questo modo, secondo le attuali nostre osservazioni, lo spazio può avere tanto la forma Euclidea, come quella di Lobatschewsky o di Riemann, risultato questo da non confondere *geometricamente,* rispetto ai principî, con quello che la superficie sferica o pseudosferica o la stella o altra figura dello spazio Euclideo ha le stesse proprietà del piano di Riemann o di Lobatschewsky. Così dicasi dell'oggetto geometrico costruito collo spazio ordinario S_3 (quale nostra rappresentazione geometrica del mondo esteriore) e un punto *fuori* di esso, quando questo punto in sè si intuisca come qualsiasi altro di S_3. La ipergeometria pura soddisfa alla condizione B, purchè non si dica che il campo di tutti i punti è a tre dimensioni, ma soltanto che la figura corrispondente al campo dell'osservazione esterna ha tre dimensioni rispetto ai suoi punti (1).

(1) Il concetto di *fuori* in senso astratto significa che un oggetto A (ad esempio un numero) non è oggetto di un gruppo di altri oggetti qualunque essi siano (ad esempio numeri). Qui matematicamente non c'entra il concetto di ambiente esterno, tanto meno quello di spazio geometrico.

In senso geometrico la proposizione: il punto A è fuori dello spazio S_3, non suppone quello dello spazio S_4 a quattro o più dimensioni. Se non altro per l'esistenza di questo spazio occorre dimostrare che il punto A può essere assoggettato insieme coi punti di S_3 agli stessi postulati, eccettuato quello delle tre dimensioni. Nel libro sono indicati varî modi che giustificano il concetto suddetto. Per es. così: Immaginiamo *prima* uno spazio S_3 e *poi* un punto A, e consideriamo come contrassegno di confronto fra il punto A e quelli di S_3 l'ordine (se si vuole anche il tempo) in cui li abbiamo pensati. Il punto A è distinto da quelli di S_3, vale a dire non è un punto di S_3. Ma si può pensare

?

E mentre i piani di Euclide, di Riemann e di Lobatschewsky possono essere esclusi da ulteriori osservazioni empiriche, l'iperspazio invece non potrà mai essere escluso quale oggetto geometrico. Si dirà che per la ricerca delle proprietà, per esempio del piano, possiamo adoperare anzichè l'oggetto stesso una sua rappresentazione simbolica. Allora difatti la questione diventa di metodo, dopo stabilite però le considerazioni che giustificano la detta rappresentazione. Ma se non vi fosse oggetto geometrico, la condizione B sarebbe inutile, e quindi non vi sarebbe geometria.

poi l'insieme di S_3 e A come già dato (come è dato lo spazio S_3) nello stesso modo che dopo avere avuta o costruita l'idea A (ad es. un numero) e poi un'altra idea B (ad es. un altro numero) possiamo considerare il loro insieme come già dato (intr. 18), astraendo dal modo con cui sono stati posti A e B.

In tal caso però la proposizione: « A è fuori di S_3 » va data con un postulato, perchè da S_3 soltanto non si deduce che esistano punti fuori di esso, come da quelli della retta e del piano non si deduce l'esistenza di punti fuori di questi enti.

Che un punto fuori dello spazio ordinario S_3 possa essere sottoposto ai postulati di questo (tranne quello delle tre dimensioni) si può dimostrare in più modi come pure indicai nel libro.

Mediante costruzioni eseguite in S_3 (colle regole che derivano dalla geometria descrittiva a quattro dimensioni, ma senza ricorrere allo spazio S_4) si può definire in S_3 una varietà Σ_4 a cui appartenga lo spazio S_3 stesso e nella quale un punto fuori di S_3 (come anche di ogni altro spazio a tre dimensioni Σ_3 di Σ_4) gode insieme coi punti di S_3 le proprietà espresse nei postulati geometrici.

Per maggiori schiarimenti sulla costruzione di Σ_4 veggansi gli Atti del Circolo matematico di Palermo, tomo VI, pag. 44-45.

Ma nel concetto dello spazio $(S_3 A)$ non tengo conto in qual modo esso sia stato costruito o pensato, mi basta solo che la proposizione « A è fuori di S_3 » soddisfi alla condizione B e si possa applicare quindi ad A come ad S_3 e alle rette, piani e spazî a tre dimensioni di $(S_3 A)$ l'intuizione spaziale. La forma così ottenuta, le proprietà della quale valgono per ogni varietà a quattro dimensioni sottoposta alle proposizioni espresse dai postulati geometrici, è ciò che chiamo spazio a quattro dimensioni.

Le conseguenze poi che si deducono dal postulato « A è fuori di S_3 » in S_3 stesso, che è comune alla varietà Σ_4 e allo spazio $(S_3 A)$, si possono dimostrare coi soli postulati di S_3, perchè esse sono pure conseguenze degli stessi ragionamenti fatti direttamente in Σ_4. Lo stesso può dirsi dello spazio ad n dimensioni (per n finito) e per lo spazio generale che ha un numero infinito attuale di dimensioni.

Egli è certo però che l'intuizione spaziale non viene applicata alle nuove teorie come lo era in passato ai soli oggetti che possono avere una rappresentazione sensibile diretta nel mondo esteriore. Il pensiero geometrico, pur conservando il carattere costruttivo della geometria pura, si trasformò combinando in modo nuovo l'intuizione coll'astrazione, come si trasformò quando ad oggetti puramente materiali sostituì degli oggetti ideali aventi una rappresentazione effettiva nel campo della nostra osservazione. È per questo che tornando a considerare come oggetti geometrici soltanto quelli materiali, pure astraendo da qualche loro qualità, come taluno ha tentato di fare, si andrebbe anche contro l'evoluzione storica dell'idea geometrica.

A chi sostiene a priori che l'intuizione non può essere applicata ad oggetti che non soddisfano agli assiomi tutti della geometria ordinaria Euclidea altro non posso dire che il dimostrarne la possibilità è appunto scopo del mio libro.

Chi leggesse con attenzione, se il mio libro lo merita, si risparmierebbe la fatica di parecchie obiezioni, come quella di un filosofo il quale discorrendo della mia costruzione degli iperspazî, disse che ammettere l'esistenza di un punto fuori dello spazio geometrico a tre dimensioni equivale ad ammettere un « cubo sferico » vale a dire un assurdo. Egli confuse una tale idea con un mondo esteriore a quattro dimensioni da noi intuito. L'intuire lo spazio è facoltà che tutti di mente sana posseggono, ma non allo stesso grado; e fra i matematici, i geometri sono quelli che la posseggono in grado maggiore.

Per quanto la intuizione sia necessaria secondo la condizione B alla geometria, i postulati però devono sempre esprimere proposizioni, le quali senza tener conto dell'intuizione, siano logicamente ben determinate.

Dall'enunciato stesso del problema A-B si vede quante questioni determinate e difficili si può porre e risolvere quanto ai fondamenti della scienza. Esso è puramente geometrico e distinto da quello filosofico sulla genesi delle idee matematiche, cioè sul modo con cui si formano in noi queste idee e sulle loro relazioni colle cose fuori del pensiero, sebbene sotto un certo rispetto si possa ammettere che la filosofia abbracci tutta la matematica. Nell'enunciato della condizione B ho però preferita per diverse

* quando parla di origine empirica della geometria, Veronese intende, con Gauss, che non può essere fondata a priori, bensì solo una indagine empirica potrebbe provare quale sia la vera geom. dello spazio.

cfr. [17] p. VIII nota 1

ragioni l'origine* empirica degli assiomi geometrici (1). In primo luogo perchè i geometri che si occuparono dei principî della loro scienza sono, si può dire, concordi su questa origine; in secondo luogo perchè anche se fosse provata la verità assoluta ad esempio del postulato di Euclide sulle parallele basterebbe modificare alquanto la forma della condizione B. Invero verrebbero così esclusi i piani di Riemann e di Lobatschewsky; ma secondo la forma da me prescelta per la condizione B ciò significa che altre osservazioni escluderebbero i detti piani. Il risultato geometrico sarebbe dunque il medesimo. Siccome però la prova certa di tale esclusione aprioristica non fu mai data, così anche se non fossi filosoficamente fautore dell'origine empirica della geometria nel senso spiegato nella prefazione (2), fra le genesi dovrei preferire geometricamente quella che comprende maggiore varietà di forme geometriche. Ed è anche per questo che sono contrario al puro empirismo quando voglia considerare quale oggetto geometrico la sola sensazione dell'oggetto materiale o l'oggetto materiale stesso, perchè in tal caso restringe la ricerca geometrica in un campo troppo angusto. È chiaro dunque che gli scritti intorno al problema (A-B) vanno giudicati anzi tutto dal matematico indipendentemente dall'utilità che ne può ritrarre il filosofo.

ma non è in fondo più geometria

Ma se il problema è matematico, il mio libro è di matematica?

(1.1.2)

Non per mio capriccio, ma esaminando del tutto in generale il problema A-B ho stabilito le condizioni a cui è necessario o utile assoggettare i postulati geometrici (3), che poi ho giustificate sia coll'autorità di illustri matematici, i quali si occuparono dell'argomento, sia con esempi tratti da altre opere. E queste condizioni mi condussero ad un sistema di postulati, i quali, astraendo da quelli sull'infinito e infinitesimo attuale come ho indicato nelle note contrassegnate con numeri romani, sono contenuti, tranne due, in quelli esplicitamente o implicitamente ammessi da Euclide, senza però che tutti quelli del geometra greco siano inclusi nei miei.

(1) Vedi la nota 2 pag. 196-(2).
(2) Pref. nota 2 pag. XIV-XV.
(3) Pag. XVI.

La ricerca è minuziosa, e questo è difetto che non saprei correggere: dapprima stanca e non diletta; ma io desidero e spero avere lettori pazienti, che non cercano nei libri altrui solo le idee proprie e non s'affannano se a queste devono arrivare a traverso una lunga catena di semplici proposizioni o se devono rendersi conto dapprincipio del significato sempre più ampio di alcune parole o più ristretto di alcune altre affine di non scorgere contraddizioni laddove non ve ne sono, e che ben sanno come oltre ai campi superiori vi sono i campi inferiori della scienza i quali meritano pure la considerazione dei matematici. Invero nelle ricerche inferiori non vi sono minori difficoltà che nelle ricerche superiori: queste sono rivolte verso l'altezza, quelle verso la profondità della scienza!

Se la minuzia della ricerca può fare incorrere nella prolissità che è difetto di forma, in questi studî nuocerebbe assai più della prolissità la soverchia concisione che può mascherare gravi difetti di sostanza. Bisogna guardarsi bene dagli avverbi *evidentemente, facilmente* ecc. di cui si può far uso con sicurezza nelle ricerche superiori.

Per seguire le condizioni alle quali ho assoggettato i postulati dovetti dunque premettere un'introduzione per lo studio della varietà (gruppi) di elementi che servono di base così alla geometria come all'aritmetica. Questa introduzione ha in molta parte un'attinenza diretta collo scopo principale del libro. Invero come ho detto alla fine del num. 55, nell'introduzione sono studiate tutte le parti dell'ass. II *a*, e dell'ipot. I del continuo rettilineo, e sono stabilite le proposizioni principali che ne derivano: le quali valgono eziandio per quelle figure che hanno in comune colla retta le proprietà espresse nella definizione della forma fondamentale. Così la introduzione serve a distinguere la scienza delle varietà astratte (la matematica pura A) dalla geometria (A-B), e a svolgere i principî del metodo sintetico astratto sul quale posa il metodo geometrico, come consiglia di riguardare la retta quale elemento fondamentale di costruzione e di riferimento delle altre grandezze geometriche.

(3.) varietà astratte

Nel principio dell'introduzione ho dato ragione della possibilità dei primi concetti matematici ricavandoli da fatti e da operazioni mentali accertate, senza occuparmi della loro origine, e quindi senza ricorrere necessariamente alla pura osservazione sensibile, che non è dimostrato basti da sola a tutti giustificarli.

E quand'anche ciò fosse, bisognerebbe esaminare se alcuni di essi non siano deducibili dagli altri. E così per evitare ogni controversia filosofica intorno alla genesi delle idee matematiche e per maggiore certezza dei risultati, io cercai anche le ragioni della possibilità dei postulati geometrici, astraendo dall'intuizione, nella sussistenza di certi fatti mentali comuni, senza badare al legame di essi coll'osservazione sensibile, vale a dire senza preferire alcuna genesi di quei fatti. Ma se anche dapprima le considerazioni mie non sembrano di matematica (perchè da esse si ricavano i primi concetti di questa) ma per es. di metafisica, oltre che se ne deve dire la ragione spiegando anzi tutto cosa si intende con questa parola, usata in sensi diversi, non si può in ogni caso lasciar credere che ciò accada anche dopo stabiliti i primi principî. Bisognerebbe poi far vedere che per dimostrare la loro possibilità *(cosa necessaria appunto per la matematica)*, si debba seguire una via sostanzialmente diversa, a cui non possa attribuirsi un tale nome.

Sebbene io sostenga la distinzione tra il problema matematico e quello filosofico sopra ricordato, tuttavia non ho tanto orrore per la filosofia quanto altri mostrano. E se trattare, come dissi, dei principî della scienza significa fare della metafisica, ricorderò allora che questa metafisica regalò ai matematici moderni il calcolo infinitesimale.

Il metodo ha in tali questioni forse più che in altre una speciale importanza. Qualora si consideri il problema (A-B) in sè e in tutta la sua generalità bisogna preferire quel metodo che meglio corrisponde alla natura degli oggetti considerati; e trattandosi di principî, il più semplice ed elementare. Non intendo però di escludere l'uso di altri metodi che servono a mettere tale problema in relazione con importanti teoriche o per rilevare alcuni gruppi di proposizioni che possono definire la geometria. Il mio metodo è elementare, e nella geometria puramente geometrico, tanto elementare che per sgombrare la via da qualsiasi pregiudizio (questa almeno fu la mia intenzione) non ho supposto nulla di matematicamente noto, anche a costo di una maggiore estensione del libro.

A sostegno di questo metodo ho citata l'autorità di sommi analisti, che si occuparono della questione (1).

Dimostrato così che il problema A-B in sè e trattato nel mio libro è matematico, sorge la domanda: è esso importante? vale a dire i risultati ottenuti nello studio di esso possono costituire un effettivo progresso nella scienza?

Per giudicare il valore matematico di una questione bisogna anzi tutto stabilire il fine della scienza a cui si riferisce. Se la matematica ha il suo fine in sè, così che il valore di essa non dipenda soltanto dalle sue applicazioni alle altre scienze, tanto meno si può dire che la importanza delle ricerche in dati campi, per es. nella geometria non Euclidea, nella ipergeometria ecc., sia subordinata alle loro applicazioni alla geometria ordinaria Euclidea, perchè matematicamente il ragionamento si potrebbe invertire. Si dirà che la geometria ordinaria ha servito e serve meglio allo studio dei fenomeni naturali nel campo delle attuali nostre osservazioni. Ma se è vero che uno degli scopi della matematica è anche questo, e certo di molto rilievo, non è pero il solo, giacchè in tal caso vi sarebbero molte teorie matematiche che avrebbero per ora almeno o poca o nessuna importanza. La matematica pura, e così la teorica di ogni campo di enti matematici, va considerata in sè come conseguenza della logica pura applicata a fatti mentali astratti, e la geometria come matematica applicata all'intuizione spaziale. D'altronde nella natura esiste anche l'intelletto umano, i cui prodotti matematici sono l'espressione più alta e più pura della verità, perchè i fatti sensibili come quelli che dipendono dall'osservazione non hanno sempre il carattere della certezza matematica e le loro leggi s'accostano bensì alla verità, e talvolta la raggiungono, ma spesso nuove osservazioni le rimutano, se non le contraddicono, laddove la concezione ma-

(1) Quando si applica alla geometria l'*analisi* in tutta la sua estensione non si risolve il problema A-B nella sua generalità, imperocchè si introducono necessariamente molti assiomi che non si discutono. Ad esempio coll'analisi ordinaria si ammette senz'altro l'assioma V di Archimede, come finora si suppone che lo spazio abbia un numero finito di dimensioni. D'altronde, come osservò Newton, ciò che è semplice aritmeticamente spesso non è semplice geometricamente (rispetto cioè alla costruzione), mentre per le condizioni del problema A-B bisogna preferire ciò che è semplice geometricamente.

tematica può raggiungere per noi il grado di certezza assoluta. E per l'armonia esistente fra le leggi dell'intelletto e quelle dell'osservazione sensibile non è a priori impossibile che anche le teorie matematiche più elevate trovino in avvenire una pratica applicazione. Appollonio non aveva certo preveduto che dopo tanti secoli le coniche avrebbero trovata così splendida applicazione come nelle leggi di Keplero.

Non si dirà dunque che segnino un progresso nella scienza quelle ricerche soltanto che sono rivolte allo studio di questioni non ancora risolte in campi di enti già conosciuti; perchè non mancano ricerche che ruppero, dirò così, le tradizioni, pur avendo un grandissimo valore, anche se in sulle prime furono combattute o trascurate o considerate quali metodi.

Una ricerca segnerà senza dubbio un notevole progresso nella scienza se ne estenderà i confini mediante concetti nuovi e fecondi, o se scoprirà nuove e feconde relazioni fra gli enti o le verità conosciute, oppure se supererà le difficoltà che si presentano nello studio di dati problemi di importanza riconosciuta. Tali risultati, mi pare, hanno pure conseguito gli studî sui principî della matematica.

L'importanza del problema A-B deriva dall'enunciato di questo; essa consiste principalmente nella certezza e semplicità della scienza e nella varietà delle forme che soddisfano alle condizioni del problema.

Comunque sia, quando nella discussione di siffatte questioni si incontra una eletta schiera di illustri matematici, ciò significa che un *valore matematico* questi studî lo hanno di certo. Per esempio per parlare della sola geometria moderna, nessuno può contrastare ormai il grande valore delle ricerche sull'indipendenza del postulato delle parallele, e sui conseguenti sistemi di Lobatschewsky e di Riemann. Nè si può negare l'importanza del risultato di Cayley e Klein sull'indipendenza della geometria proiettiva dal postulato suddetto. Similmente dicasi delle ricerche di Bolyai, di Helmoltz, di Lie ed altri. Studî di molto valore possono essere anche quelli che mettono la questione dei principî in relazione con altre importanti teoriche, per es. quello di Beltrami sulla pseudosfera, come molto utili possono essere quelli che svolgono la geometria sotto nuovi aspetti suggeriti dai risultati precedentemente ottenuti, e quelli

ancora che semplificano o rendono più rigorosi i metodi da altri usati o si propongono di dimostrare alcune proposizioni coi soli postulati strettamente ad esse necessarî e già stabiliti.

Ma contiene il mio libro verità scientifiche nuove e importanti?

È per me più facile rispondere alla prima che alla seconda parte della domanda. Ma siccome nessuno deve mettere in luce scritture che almeno nella convinzione di lui non abbiano qualche utilità, per quanto di poco conto, e specialmente ove si tratti di indagini che per la loro varietà e l'indole critica e minuziosa non aiutano a prima vista il lettore a farsi un esatto concetto del loro contenuto, così non è inopportuno che io metta in rilievo i risultati principali dell'opera mia.

Facendo pure astrazione dal metodo di ricerca, che ha la sua speciale importanza (1), dalla prefazione e dall'appendice scritte a schiarimento e a complemento del testo, e che da questo ricevono in molta parte la loro esatta interpretazione; astraendo pure così dall'essere svolta sistematicamente per la prima volta nel mio libro la ipergeometria elementare, come da parecchie proposizioni nuove sebbene elementari che saranno utili nello sviluppo di certe parti della ipergeometria; se tengo conto appunto delle opere del genere della mia accennate nell'appendice (2), credo che il testo contenga delle verità nuove, defi-

(1) La R. Accademia di Berlino bandì un concorso nel 1884 pel premio Steiner proponendo per tema « la trattazione puramente sintetica della teoria delle curve e superficie algebriche » e premiò il lavoro del sig. dott. E. Kötter. Così la Commissione della R. Accademia dei Lincei pel concorso del 1887 al premio reale per la matematica non si è astenuta dal prendere in esteso esame il lavoro del prof. R. De Paolis sullo stesso tema, e uno dei commissari, dopo la morte immatura del compianto autore, dichiarò che se fosse stato presentato all'Accademia il lavoro completo, esso avrebbe vinto senza dubbio la corona. Questa è nuova prova dell'importanza del metodo.

(2) Da queste sono escluse per l'indole stessa del mio trattato gli opuscoli e libri che si occupano degli assiomi geometrici dal *punto di vista filosofico*, quei lavori anche di matematici, nei quali si discorre degli assiomi geometrici troppo in generale e indeterminatamente, i trattati elementari ad uso delle scuole (di alcuni fra i quali ho parlato talvolta nella prefazione e nelle note del testo); e finalmente i lavori che riguardano solo i principî dei metodi (pag. 567 dell'originale e pag. 634 della traduzione tedesca).

nitivamente acquisite alla scienza e degne di qualche considerazione.

Tali sono le relazioni di dipendenza e indipendenza dei postulati e le loro conseguenze.

I. - L'indipendenza del postulato delle tre dimensioni dagli altri postulati geometrici era già stata riconosciuta da H. Grassmann e messa maggiormente in luce da Riemann ed Helmoltz. Ciò che mancava non era il nome ma l'oggetto geometrico dell'ipergeometria, dimodochè autorevoli geometri, fra i quali Bellavitis, combatterono ingiustamente e talvolta acremente le teorie distinte con questo nome, sostenendo però con ragione che si trattava allora di matematica pura (A). Per questo non è la ipergeometria propriamente detta (A-B) nè l'Ausdehnungslehre (per Grassmann la geometria è sempre a tre dimensioni) nè le varietà analitiche di n dimensioni.

Io ho stabiliti i principî della geometria addirittura per lo spazio generale, che ha un numero infinito attuale di dimensioni anzichè per uno spazio a tre o ad n dimensioni, essendo n finito. Ancora manca la trattazione analoga col metodo analitico (1).

II. - Una questione importante è quella del segmento infinito e infinitesimo attuale. Si tratta di una controversia secolare, nella quale molti errori furono commessi sia dagli oppositori come dai sostenitori di tali segmenti, i principali dei quali ho rilevato nell'ultima parte dell'appendice. La questione non fu mai posta nè trattata come nel mio libro. Per chi non voglia ingolfarsi, come me, in disquisizioni metafisiche, essa si pone in modo assai semplice.

Nei trattati elementari viene ammesso tacitamente od esplicitamente il postulato V d'Archimede, il quale stabilisce che se A e B sono due segmenti rettilinei qualunque ed è $A < B$, vi è un numero n finito tale che è $An > B$.

Esso esclude appunto ogni segmento limitato infinitesimo (ed anche infinito), pel quale non vi è alcun numero n, per quanto grande, che soddisfi alla condizione anzidetta. Ora, questo postulato è egli dipendente o indipendente dagli altri della geometria elementare (probl. A)? Se non si dia il postulato della continuità, quello d'Archimede è indipendente dai rimanenti.

(1) A ciò avevo già accennato in una nota della Memoria: « Sulla superficie omaloide ecc. ». *Atti della R. Accademia dei Lincei,* 1884.

Se è dato nella forma proposta da Dedekind (1), feci vedere, premettendo alcune semplici considerazioni, che l'enunciato stesso del postulato di Dedekind esclude la proposizione contraria a quella di Archimede. Ma il concetto del continuo si rende indipendente da questo assioma quando si dà nella forma della mia ipotesi VIII o VI dell'introduzione (2).

Vi possono dunque essere in senso astratto (probl. A) dei segmenti che fra loro non sono sottoposti al postulato di Archimede, e sono assoggettati invece agli altri postulati della geometria. Dall'ammetterli risulta un sistema di nuovi numeri complessi ad infinite unità, pei quali valgono le leggi ordinarie delle operazioni fondamentali dell'aritmetica, e che costituiscono un continuo assoluto numerico diverso da quello ordinario che fa parte del primo (3).

(1) Cioè. separati i punti di ogni segmento *(A B)* in due gruppi *(G)* e *(G')* tali che qualunque sieno i punti G e G', *(A G)* è minore di *(A G')*, vi è uno ed un solo punto Y che determina i due gruppi *(G)* e *(G')*, in modo cioè che *(A Y)* contiene tutto il gruppo *(G)* e *(Y B)* il gruppo *(G')*.

(2) Ammesso che sulla retta non vi sia un segmento limitato minimo, il mio postulato del continuo si enuncia così: Quando gli estremi di un segmento *(X X')* i cui estremi sono variabili sulla retta in verso opposto, diventa indefinitamente piccolo, vi è in esso un punto Y distinto dagli estremi.

La differenza dei due postulati sta appunto in ciò, che fatta la divisione suddetta secondo il concetto di Dedekind, il segmento *(G G')* può non diventare indefinitamente piccolo in senso assoluto pur diventando indefinitamente piccolo nel senso ordinario rispetto ad *(A B)*. Nel mio caso vale il teorema che una variabile sempre crescente nel segmento *(A B)* ha un limite superiore, ma bisogna che la variabile sia sempre crescente (o decrescente) secondo la definizione IV n. 100 dell'introduzione. Vedi anche la mia nota: « Il continuo rettilineo e l'assioma V Achimede » *(R. Accademia dei Lincei, 1890)*.

(3) Veggasi a questo proposito anche la Memoria del sig. Tullio Levi Civita intitolata: « Infiniti e infinitesimi attuali quali elementi analitici » *(R. Istituto Veneto, 1893)*.

Anche solo i miei infiniti e infinitesimi rettilinei non si possono confondere con quelli di Du Bois Reymond. Ho già osservato che le considerazioni di Du Bois *(Allg. Funktionenth. 1892)* non definiscono affatto i segmenti infiniti e infinitesimi del suo idealista. (Veggasi l'ultima nota aggiunta all'appendice del libro).

S'intende cosa vuol dire il Du Bois quando accenna che a tali segmenti va applicato il suo calcolo infinitario (l. c. pag. 76). Ora gli infiniti e infinite-

Ma tali segmenti, pur essendo possibili astrattamente, sono essi possibili anche geometricamente (condizione B)?

Non sono di certo intuitivi contemporaneamente coi segmenti finiti, perchè gli oggetti rettilinei che noi vediamo nel campo della nostra osservazione soddisfano all'ass. V d'A r c h i m e d e. Ma il segmento infinitesimo, come dimostrai nell'introduzione è nullo rispetto ad un segmento finito, e quindi anche se esistesse esteriormente non potremmo vederlo. Così non potremmo vedere il segmento infinito.

L'ipotesi dell'esistenza astratta di segmenti infiniti attuali (che non esprime l'esistenza effettiva di oggetti ad essi corrispondenti nel mondo esteriore) soddisfa dunque alla condizione B. In ogni campo infinito e infinitesimo, i cui segmenti sono sottoposti all'assioma di A r c h i m e d e, possiamo applicare la nostra intuizione spaziale, come in ogni spazio a tre dimensioni dello spazio generale.

Il passaggio dal campo di un'unità a quello di un'altra unità, come quello da uno spazio a tre dimensioni ad un punto fuori di esso, non è intuitivo ma è determinato da un atto mentale o da una corrispondente operazione simbolica possibile. Del resto si può avere una rappresentazione della mia retta assoluta nel campo Euclideo stesso per mezzo di opportune definizioni, in modo che lo spazio ordinario rappresentativo sia uno spazio ordinario del sistema rappresentato. Ciò non solo prova la possibilità delle ipotesi della geometria assoluta, ma eziandio che esse applicate allo studio degli enti della geometria ordinaria non vi introducono nuovi postulati (tranne quello delle parallele).

Ammettendo appunto la retta assoluta chiusa (ip. I e V parte I) si ha il sistema assoluto Riemanniano, come si ha

simi di questo calcolo non soddisfano alle regole delle operazioni fondamentali dell'aritmetica, e mentre nella nota a pag. 124 dell'originale avevo lasciato supporre che i miei infiniti e infinitesimi rettilinei potessero essere espressi per mezzo di infiniti o nulli delle funzioni, appunto per la proprietà suddetta ciò non può aver luogo.

Inoltre D u B o i s non si è chiesto se i suoi infiniti e infinitesimi siano possibili cogli altri assiomi geometrici, nè ha ammesso alcuna nuova ipotesi sul continuo. (Vedi anzi a questo proposito la nota 1 del n. 96 della mia introduzione).

il sistema Riemanniano nel campo dell'unità rispetto alla quale l'intera retta è finita; mentre in quelli infinitesimi vale il sistema Euclideo, dimodochè, oltre ad avere une geometria indipendente dal postulato d'A r c h i m e d e, si utilizza direttamente il sistema Riemanniano nella dimostrazione delle proprietà di quello Euclideo, e inversamente.

Io feci anche vedere che si può stabilire la corrispondenza proiettica fra due punteggiate rettilinee, che non soddisfano all'assioma d'A r c h i m e d e e che la corrispondenza è pure continua. Coloro che si occuparono dell'indipendenza della geometria proiettiva del postulato delle parallele ammisero però quello di A r c h i m e d e o dandolo esplicitamente o ammettendolo implicitamente col far corrispondere i punti della retta ai numeri del continuo ordinario, oppure col postulato di D e d e k i n d, o ancora ammettendo che una serie infinita (S_n) di elementi (però per n sempre finito) abbia sempre un elemento limite. Noi possiamo dire invece che la geometria proiettiva è indipendente dal postulato d'A r c h i m e d e.

III. – È pure antica controversia se la geometria abbia bisogno o no del movimento dei corpi, in particolare di quello senza deformazione. Negli ultimi tempi si nota nei trattati elementari una più spiccata tendenza in favore del movimento, che da taluni, ad es. da H e l m o l t z e da H o u ë l, si ritiene anzi necessario allo svolgimento della geometria elementare.

Nella geometria bisogna separare gli assiomi necessari allo svolgimento logico di essa da quelli pratici necessari per eseguire cogli oggetti materiali le costruzioni geometriche, perchè anche l'oggetto della geometria a tre dimensioni non è già l'ambiente fisico esteriore, sia pure facendo astrazione da alcune sue qualità, ma la nostra rappresentazione di esso. Ora io feci effettivamente vedere ed enunciai apertamente che la geometria teorica è indipendente così dal movimento reale, come dalle tre dimensioni del mondo esteriore, e che l'assioma del movimento senza deformazione è necessario soltanto quale mezzo pratico per costruire graficamente i problemi geometrici sul foglio del disegno o i modelli degli enti geometrici a tre dimensioni.

Questa indipendenza mi ha costretto però a trasformare una parte della geometria elementare ed a stabilire per altra via il concetto dell'eguaglianza delle figure, non solo senza ricorrere al movimento, ma neppure ad altri assiomi che con quello dell'eguaglianza nulla hanno che fare. E vi sono riuscito, come per tutte le altre forme matematiche (e quindi anche pei numeri) derivandolo direttamente dal concetto logico dell'eguaglianza, concetto di cui facciamo uso nel discorso. E non solo la geometria teorica è indipendente dal movimento, ma il movimento senza deformazione ha bisogno del concetto di eguaglianza, e nello spazio ordinario (come in uno ad n dimensioni) restringe questo concetto alla sola congruenza, e la congruenza alla proprietà delle linee descritte nel movimento. Quando alle proprietà contenute nei postulati del movimento senza deformazione si sostituiscono proposizioni astratte ben determinate, indipendentemente cioè dall'intuizione del movimento, allora si scorge non solo che essi sono superflui ma che fanno le veci di proprietà dello spazio molto complesse mentre i miei assiomi per l'eguaglianza delle figure si riducono a quello dell'esistenza di segmenti eguali sulla retta, sull'eguaglianza di due rette con un punto comune e all'altro delle coppie rettilinee determinate da due raggi con un punto comune (1).

Nessuno che io sappia ha mai detto e provato rigorosamente che la geometria pura elementare possa essere svolta senza il principio del movimento senza deformazione, sebbene io abbia notato in alcuni lavori analitici, ad es. di Klein e Lie la tendenza ad escludere un tale principio. Secondo questi autori si farebbe dipendere la definizione dell'eguaglianza delle figure da altri concetti pure di eguaglianza e da postulati, che nulla hanno che fare con quel concetto, per es. da quello del continuo e dal numero delle dimensioni dello spazio. Tale definizione non dà la eguaglianza assoluta, perchè quella eguaglianza sussisterebbe ancora dopo aver piegata la figura stessa senza rottura o stiramento, cambiando così la posizione relativa delle

(1) A questo proposito si può esaminare il § 2 dell'introduzione, i §§ 9, 22, 23 del cap. I del libro I. i §§ 17, 18, 19 e 20 del cap. I libro II e i corrispondenti paragrafi per gli spazî a tre e più dimensioni. E per la storia dell'argomento si può leggere la nota a l esso relativa in fine della appendice.

parti che pure deve essere mantenuta. Nello spazio generale quei metodi non forniscono, per ora almeno, alcuna definizione.

IV. - Fatta astrazione dalle ricerche sovraccennate, coi miei assiomi della retta, (che sono compresi in quelli ammessi per essa nei trattati di geometria elementare), dimostro alcune notevoli proposizioni assunte comunemente quali assiomi. Per esempio dopo aver dedotto la legge commutativa della somma di due segmenti qualunque, dimostro che un segmento percorso in un verso è eguale allo stesso segmento percorso nel verso opposto. Di più ho dimostrato coll'aiuto degli assiomi II b, III e IV riguardanti la retta con elementi fuori di essa, che basta ammettere che la retta sia individuata da una coppia di punti distinti per dedurre che se la retta è aperta (sistema di Euclide e di Lobatschewsky) allora essa è individuata da ogni altra coppia di punti distinti; mentre quando è chiusa può non essere determinata da due punti che la dividono per metà (1).

V. - Gauss aveva già osservato che l'assioma fondamentale del piano « una retta avente due punti comuni col piano giace in esso » è difettoso (2).

Ciò si capisce perfettamente per gli iperspazî le cui proprietà devono dedursi tutte dalla loro costruzione non avendo per essi una diretta rappresentazione reale.

(1) Osservo che la determinazione della retta mediante una coppia di punti riguarda la retta insieme con altri elementi fuori di essa; serve cioè ad esprimere la proposizione: che se *due* rette hanno quei due punti comuni coincidono; oppure che per quei due punti passa una *sola* retta. L'aver fatto uso di postulati nella dimostrazione della detta proposizione, i quali riguardano anche elementi fuori della retta, non significa dunque che essi sostituiscano altri postulati della retta in sè, come accade ricorrendo a punti fuori della retta e del piano per stabilire i principî della geometria proiettiva della retta e del piano.

L'egregio dott. Bettazzi in una nota di carattere didattico sulla definizione della retta (*Periodico di Matematica*, fasc. 1-2, Roma 1893) dà la preferenza dal punto di vista teorico alla mia definizione della retta, ma incorre in alcune inesattezze sia per quanto gli sembra manchi alla definizione per essere completa, mentre è sufficiente; sia per ciò che secondo lui supplisce all'espressione « identico nella posizione delle sue parti » la quale non supplisce che alle proposizioni contenute nella definizione I, 70 dell'introduzione.

(2) Veggasi la nota 1 della pag. XIX dell'orig., o XVIII della traduz. tedesca.

Colla retta (ammesso l'assioma delle parallele, nel senso Euclideo quando si faccia senza gli infiniti attuali) si costruiscono tutte le altre forme e si dimostrano tutte le proprietà fondamentali così degli iperspazî come del piano e dello spazio ordinario, e quindi anche tutte quelle non poche e non semplici che si assumono quali postulati per questi enti nei trattati di geometria elementare (1).

È vero che per dimostrare la proposizione anzidetta del piano mi sono servito del postulato delle parallele (la definizione delle quali si può dare indipendentemente dal piano anche senza ricorrere agli infiniti), ma ho accennato, trattando dei piani di Lobatschewsky e di Riemann ad un'altra via per la quale si potrà forse dimostrare quella proposizione per tutti e tre questi piani. Il Klein ammette già che ogni retta avente due punti comuni col piano, vi giaccia interamente, come pure suppone l'esistenza dello spazio a tre dimensioni per dimostrare l'indipendenza della geometria proiettiva della retta, del piano e dello spazio ordinario dal postulato delle parallele. Per sua natura la proprietà suddetta è di posizione, ma che si possa dimostrare coi miei postulati, vale a dire partendo da quelli della retta, senza quello delle parallele o senza ammetterlo in una o nell'altra forma, in cui esso è possibile, è un'altra questione (2).

VI. - Nelle note indicate con numeri romani nella parte relativa alla retta e al piano ho svolto la geometria senza gli infiniti e infinitesimi, dalle quali è chiaramente indicata la via che si deve seguire anche per l'altra parte del testo (3).

(1) Anche se non mi sono occupato nel libro dell'equivalenza delle figure a più d'una dimensione, dal risultato anzidetto espresso esplicitamente alle pagine XVIII e XXXVII dell'originale (XVIII e XXXV della traduz.) è evidente che io non ho ritenuto neppure necessario alcun assioma geometrico speciale per questa teoria, di cui si sono occupati più recentemente altri autori.

(2) Vi sono delle proprietà comuni ai tre sistemi suddetti che si possono dimostrare senza il postulato delle parallele, ma non è escluso che ve ne siano altre pure comuni le quali non possano essere dimostrate senza ammettere l'una o l'altra forma del postulato. Se per costruire completamente il piano con una retta e un punto fuori di essa, è necessaria una o l'altra forma del postulato, non è però necessaria per la figura formata dalla retta col punto. La questione dunque si riduce a dimostrare senza l'una o l'altra forma del postulato che un segmento avente comune due punti comuni colla figura suddetta giace in essa.

(3) Vedi la nota I.

E in queste note stesse ho percorso dapprima due vie, l'una puramente scientifica, l'altra a scopo didattico. Nelle conferenze tenute dai giovani della Scuola di Magistero ho fatto anzi vedere come i principî di questa parte, fatte - s'intende - le debite riduzioni e modificazioni, possano servire di guida nella riforma dell'insegnamento geometrico elementare.

Questi sono gli scopi e i risultati principali scientifici del mio libro, ottenuti con metodo elementare che, ove si badi al suo carattere anzichè alle questioni in esso trattate, può dirsi Euclideo (1).

Nella ricerca dei primi concetti e nella trattazione del problema sono andato più in fondo che ho potuto, ma per quanto ho detto dapprincipio ciò non significa che anche nello stesso indirizzo non si possa far di più e di meglio.

Nota I.

Gli argomenti accennati in I-VI possono essere intesi separatamente quando si conceda quanto precede, ricorrendo alle premesse soltanto per conoscere esattamente il significato di certe definizioni e proposizioni.

Così la ipergeometria elementare può essere studiata seguendo il testo. Non volendo far uso degli infiniti e infinitesimi attuali bisogna introdurre con definizioni gli elementi impropri all'infinito.

Introdotto il punto all'infinito di due rette parallele (nota XLIV) si fa vedere che il luogo all'infinito di un fascio di rette (e quindi del piano) determina con ogni punto del campo finito un altro fascio, e quindi un altro piano. Il luogo suddetto si può chiamare dunque *retta all'infinito* del piano.

Dalla geometria della stella mediante opportune definizioni che si suppongono già conosciute si ha quella del luogo all'in-

(1) Oltre ai risultati aritmetici inclusi nei precedenti (II), noto ad esempio il teorema che dato un gruppo naturale di oggetti (dato da una serie limitata che non contiene serie illimitate) il numero di essi non cambia col mutare l'ordine in cui si contano; proposizione che mi pare per la prima volta dimostrata rigorosamente (pag. 33-34 dell'originale e 38-39 della traduzione).

finito di S_3 che si può chiamare *piano*. Rispetto alle proprietà di posizione si possono scambiare gli elementi all'infinito con quelli del campo finito in S_3.

Nella retta vi sono due raggi opposti, e facendo corrispondere i punti all'infinito ai raggi rettilinei anzichè alle rette, in modo che ad ogni raggio corrisponda un punto, e ad ogni punto congiunto con un punto del campo finito corrisponda un raggio, si hanno allora all'infinito delle coppie di punti che non determinano la retta e il piano all'infinito di S_3 è un piano Riemanniano.

Costruito lo spazio S_4 dopo il numero 122 del libro si dimostra che un piano all'infinito di S_4 determina uno spazio S_3 con ogni punto del campo finito, dimodochè il luogo all'infinito di S_4 ha in sè le stesse proprietà dello spazio Riemanniano, già studiato precedentemente. Ciò stabilito si può seguire il testo stesso.

Vi è una differenza sostanziale fra gli infiniti attuali e quelli impropri. I primi servono anzitutto a costruire una geometria indipendentemente dall'ass. V d'Archimede, e che contiene varî sistemi assoggettati a questo assioma. Usati come metodi per lo studio dello spazio ordinario, essi servono a definire il parallelismo degli elementi di esso mentre gli infiniti impropri vengono definiti mediante gli elementi paralleli.

Un altro argomento nel mio libro che può essere studiato separatamente è quello sulle proprietà caratteristiche proprie ai tre sistemi di Euclide, di Lobatschewsky e di Riemann (cap. III parte I), come pure lo studio del piano e dello spazio Riemanniano, ammettendo per il primo che una retta avente in comune con esso due punti vi giace interamente.

Finalmente l'appendice può servire di guida per una discussione generale dei principali concetti svolti da altri autori, specialmente di questo secolo, sui principî della geometria, che ho coordinato con quelli svolti nel testo. Per fare di essa uno studio completo bisogna conoscere i concetti fondamentali del libro.

Tutte queste parti dell'opera mia, se possono essere intese separatamente, sono però concatenate fra loro, secondo i concetti generali sopra enunciati.

Nota II.

Il Lie in una nota stampata nei Berichte della Società delle scienze di Lipsia (1892) e riprodotta con alcune modificazioni nel 3° volume della *Theorie der Transformations gruppen* (1893) ha osservato che nel mio libro (cioè per dir meglio nell'appendice) ho riferito con piena esattezza i risultati principali dei suoi lavori sui principî della geometria, ma ha criticata una mia osservazione incidentale intorno all'assioma della monodromia di Helmoltz. A pag. 590 (e con qualche modificazione a pag. 662 della traduzione tedesca) dissi:

« De Tilly ha per primo sostenuto che questa ipotesi per lo spazio deriva dalle precedenti ».

Il Lie dice invece che De Tilly « hat etwas Derartiges nicht einmal behauptet ».

Se si considerano quelle mie parole insieme con quanto dissi prima sui lavori del Lie e poi sull'opera del geometra belga (2), mi pare che esse non diano luogo ad alcun equivoco. Invero da quanto dissi prima (a pag. 590) (1) risulta che attribuii al Lie la priorità della dimostrazione dell'assioma della monodromia, perchè dalla critica fatta subito dopo all'opera di De Tilly (nella quale è compresa in gran parte quella del Lie) risulta pure chiaramente che egli non dimostrò rigorosamente il detto assioma. Rimane dunque da vedere se De Tilly abbia sostenuto in qualche modo l'indipendenza dell'ipotesi IV di Helmoltz dalle altre tre. Ora rileggendo le pag. V e 38-39 del trattato di De Tilly, io non posso che confermare il giudizio che egli non solo ne ha intravveduta la indipendenza ma anzi ha tentato di dimostrarla, credendo fermamente al rigore della sua dimostrazione, salvo qualche riserva (3).

(1) Traduzione tedesca, pag. 661.

(2) Essai sur les princ. fond. de la geóm. et méc. abstraite. Bordeaux 1879.

(3) Nella prefazione del libro di De Tilly scritta da Houël a pag. V è detto:

« Reste done la série des axiomes de Helmoltz. Or notre savant confrère (cioè De Tilly) pense que cette série ne repond pas parfaitement aux conditions que l'on doit exiger des vrais axiomes. Les hypothèses 2 et 3 con-

Quanto alla dimostrazione del detto assioma data da Klein e che io citai appena, e fu criticata da Lie, rimando per schiarimenti alla 2ª parte delle lezioni autografate di Klein sulla « Höhere Geometrie » (parte. II pag. 229 e 241-43, 1893).

A questo proposito ripeto qui quanto dissi in una nota della prima pagina della prefazione. Dal dicembre 1889 fino al 1891, cioè durante la stampa del libro, non sempre potei tener conto quanto avrei desiderato degli scritti pubblicati in quell'intervallo di tempo. Nella 3ª nota a pag. 598 dissi pure che non avevo potuto leggere tutte le parti del lavoro di Lie, e quindi non avevo potuto fare un raffronto fra la dimostrazione di Lie e quella di Klein. Questo raffronto non era del resto necessario per lo scopo che mi proposi nell'appendice, nella quale non volli fare uno studio storico e critico completo, bensì un'esposizione dei principali concetti svolti negli scritti più importanti sui principî della geometria in relazione con quelli del testo (1).

Del resto l'interesse che un matematico del valore di Lie pone in tali questioni viene a confermare una volta di più l'importanza del problema di cui ho parlato precedentemente.

stituent le principe de l'invariabilité des systèmes, et doivent être admises dans tous les cas; mais l'admission préalable des notions premières de points, de lignes et de surfaces permet, selon M. De Tilly, de démontrer rigouresement les principes 1 et 4 ».

E De Tilly a pag. 38-39 dopo aver dichiarato che egli si separa da Helmoltz nel considerare la possibilità del movimento intorno a due punti fissi come un assioma, e che egli crede fermamente rigorosa la sua dimostrazione, fatta poi qualche riserva, egli dice:

« Ainsi en résumé l'axiome I de M. Helmoltz semble poivoir être ramené aux notions premières (sauf les réserves faites ci-dessus), et d'ailleurs il n'est pas employé dans l'exposition proprement dite; ses axiomes II et III constituent au fond, notre axiome unique, mais complexe, de la distance, son axiome IV, dans sa première partie (possibilité de la rotation autour de deux points) semble pouvoir être ramené aux notions premières (sauf les réserves faites ci-dessus) et sa seconde partie (retour du système à sa position initiale après un tour complet) sera démontré plus loin, sans que, cette fois, nous apercevions aucune réserve à faire ».

(1) Vedi pag. 564 dell'originale e pag. 631 della traduzione tedesca.

IL PALAZZO CAVALLI A PORTE CONTARINE IN PADOVA

MEMORIA DEL SOCIO CORRISPONDENTE

Dott. EDOARDO VECCHIATO

I.

Ora che il palazzo già ad uso di R. Dogana a porte Contarine in Padova, come scrisse il magnifico Rettore della nostra Università, Comm. Carlo Ferraris (1), sta per divenire sacro al culto di quelle scienze, da cui scaturirono moltissimi dei maravigliosi progressi del nostro secolo e che tra breve in quella parte della nostra Città « si ricongiungeranno con vincolo ideale e reale la romana coltura, l'arte del medio evo e del risorgimento, la scienza italiana del secolo XIX, e l'occhio abbraccierà i simboli di tre gloriose età della patria nostra » non credo inutile di porre in evidenza l'errore ormai comune di chiamare quel palazzo col nome di Contarini, e di illustrarlo con delle notizie, o sparse in più libri o tolte da documenti originali e da nessuno mai pubblicate (2).

(1) Prefazione al progetto di adattamento e ristauro del palazzo, redatto dal professore ing. Chicchi.

(2) Anche negli Atti ufficiali si usa chiamarlo palazzo Contarini; con tal nome lo designa pure il progetto di adattamento, citato nella nota precedente; non è cosa che rechi alcuna meraviglia, poichè il comune modo di indicare un oggetto è naturale sia seguito ne' pubblici documenti. Ma trattandosi di una denominazione errata, come del resto già è noto, mi è parso conveniente insistervi, per contribuire a cambiarla, e per suffragare anche con nuove prove la sua denominazione vera di palazzo Cavalli, sul quale ho voluto anche dare quelle poche notizie che sono riescito di procurarmi, giacchè per quanto so, quantunque trattisi di edifizio di un qualche merito, come fabbrica, fu trascurato da tutti gli scrittori di cose cittadine.