

A proposito di una lettera del prof. Peano;

Osservazioni di G. Veronese, in Padova⁽¹⁾.

Adunanza del 13 marzo 1892.

Il sig. prof. Peano, nella lettera aperta a me diretta nella sua *Rivista di Matematica*, il 1° dicembre 1891, mi chiede una risposta ad alcune osservazioni da lui fatte sulla teoria degli iperspazi a proposito di un articolo del prof. Segre, stampato nella stessa *Rivista* (2).

Chi legga attentamente il mio libro «*Fondamenti di Geometria* (3)», uscito appunto negli ultimi giorni del novembre u. s., troverà che esso risponde anzitutto da sé alle suddette osservazioni, come risponde a quelle di altri autori che ho riportate nelle note dell'appendice senza una risposta diretta, come anche ad altre che avevo lette e non ho riferite. E potrà anche trovare una risposta indiretta in alcune considerazioni della prefazione e dell'appendice (4).

Rilevo però che quand'anche fosse vera in sé e rispetto al mio libro l'unica affermazione precisa, cui si riducono in fondo quelle osservazioni contro l'uso dei procedimenti geometrici coi quali si deducono proprietà di uno spazio (compresi la retta ed il piano) da uno spazio superiore, essa non intaccherebbe neppure quella parte dell'opera che tratta i principi della teoria in discorso. Infatti quell'affermazione non combatte i postulati di questa, e d'altronde le poche considerazioni che feci nel mio libro sulle operazioni del proiettare e del segare (pag. 550-561) per collegarlo coi miei precedenti lavori su tale teoria, sono vere, anche pel sig. Peano, quali proprietà di geometria a più di tre dimensioni (5).

Nonostante ciò aggiungo qui alcune considerazioni, le quali potranno servire al lettore che non è addentro nei miei studi, a maggiore intelligenza dei punti citati del mio libro, in risposta a quella affermazione.

Nota anzitutto che nella mia prima Memoria sulla teoria degli iperspazi stampata nel vol. XIX dei *Math. Annalen*, e che ha servito di base ad altri miei

studi posteriori, non ho parlato di postulati speciali nè di S_3 , nè di S_n , intendendo tolto soltanto il postulato delle tre dimensioni.

Per me la geometria non si limita dunque alle sole dimensioni dello spazio fisico, ma neppure ad un numero dato n finito intero di dimensioni (pag. vi). Distinguo anzi nettamente la geometria teoretica dalle sue pratiche applicazioni, dimodochè vi sono assiomi necessari per queste (ad es. l'assioma del movimento e quello delle tre dimensioni dello spazio fisico) che non lo sono per quella (p. ix).

Tutto l'insieme di punti, che secondo gli assiomi dati possiamo immaginare tali e quali ce li rappresentiamo nello spazio ordinario, è lo spazio generale. Questo spazio considerato come già costruito o dato ha un numero infinito attuale di dimensioni. Quindi la geometria è la scienza dello spazio generale, e perciò anche delle figure in esso contenute. Ma le considerazioni fatte nel mio libro, tranne alcune, valgono indipendentemente dalla definizione di questo spazio, sebbene per maggiore libertà lavoro sempre in esso (p. xxxix).

Lo spazio generale è geometricamente possibile, e quindi ha una realtà astratta, senza intendere con ciò che il mondo esteriore in sé ne sia una rappresentazione completa (p. xii). Lo spazio ordinario, piuttosto che il luogo degli oggetti esterni considerato come esistente fuori di noi ed unico, è per me la nostra rappresentazione intuitiva di esso. E poi per mezzo di operazioni mentali che io immagino dei punti fuori dello spazio a tre dimensioni. E li possiamo immaginare sia per via di definizioni, sia per via di ipotesi. E per ciò che la costruzione e l'ipotesi geometrica della quarta dimensione sono ben diverse dall'ipotesi metafisica di uno spazio a quattro dimensioni effettivamente esistente fuori di noi (p. xii).

Come si applichi l'intuizione spaziale nello studio dello spazio generale si vede esuberantemente nel mio libro, e nei miei precedenti lavori.

A questo proposito (p. xxxiii) dissi che dallo svolgimento della II^a parte del testo risulta chiaramente che il mio processo costruttivo della geometria a più di tre dimensioni è un processo nel quale l'intuizione è fusa colla pura astrazione, ma che non intendo di intuire completamente le figure di n dimensioni e dello spazio generale come intuimmo quelle di tre, corrispondenti agli oggetti della nostra osservazione esterna. E a pag. xvii ho detto: se l'intuizione è necessaria per l'essenza della geometria (e secondo me dunque anche per quella a più di tre dimensioni nel senso sopra spiegato) non deve però essere elemento necessario, per quanto utile, nello svolgimento logico della geometria stessa; di guisa che (p. xvi) gli assiomi, i teoremi e le dimostrazioni fin da principio non contengano alcun elemento intuitivo indeterminato, in modo cioè che facendo astrazione dall'intuizione rimanga un sistema di proprietà astratte ben determinato. Ed è per questo che mi sono occupato, nell'introduzione, delle proprietà fondamentali dei gruppi di elementi, che nel mio libro servono di base alla geometria come all'aritmetica.

Questo è brevemente il concetto della geometria a più dimensioni nel senso da me inteso, e che sta pure a fondamento della mia citata Memoria (6).

Da quanto ho detto non è escluso che cogli assiomi dati lo spazio generale S possa essere costruito per via di definizioni. Considerandolo poi come un ente dato, sebbene astratto, e volendo stabilire le sue proprietà fondamentali caratteristiche, oltre gli assiomi suddetti, occorrono delle ipotesi che esprimano precisamente le proposizioni date da quelle definizioni, secondo le quali esiste un punto fuori di uno spazio S_n qualunque. Io di preferenza lo considero sotto questo aspetto, allo stesso modo che si considera lo spazio ordinario, applicando in ogni spazio S_3 di S l'intuizione spaziale. Si tratta in fondo di interpretazione diversa, che ha però la sua utilità nella ricerca geometrica. Ma per le conseguenze logiche non è necessario dare quelle proposizioni sotto forma di ipotesi.

Ora è chiaro che nel primo caso ogni proprietà P dedotta da S in S_3 è dimostrabile coi postulati dati e colla costruzione di S_3 (ossia col postulato delle tre dimensioni). Quindi ciò vale anche nel secondo caso, poichè nella dimostrazione di P si usano le stesse proposizioni.

Si può costruire ad esempio direttamente nello spazio ordinario R_3 coi procedimenti della geometria descrittiva a più di tre dimensioni (7) una rappresentazione Σ_4 di S_4 che soddisfi alle stesse proposizioni fondamentali di S_4 , e in cui il punto ce lo immaginiamo come nello spazio ordinario. Essa dà la proiezione di S_4 in R_3 . A ciò si riferiscono appunto le parole citate della pag. xxxiv.

Infatti, un punto di S_4 viene determinato nella proiezione centrale da una retta passante per esso colla sua traccia e col suo punto di fuga. Le traccie e gli elementi di fuga di rette situate nello stesso piano, o di piani situati nello stesso spazio a tre dimensioni, giacciono rispettivamente in rette, o in piani, paralleli. Gli elementi traccie e di fuga possono coincidere, e cadere anche all'infinito. Lo spazio R_3 in cui si proietta (indicato con Γ_3 se si considera appartenente a S_4) è rappresentato da sè stesso.

Queste osservazioni ci suggeriscono il modo di definire il punto, la retta, il piano e lo spazio a tre dimensioni di Σ_4 in R_3 . Per costruire la varietà Σ_4 basta considerare un punto Π in R_3 (quale proiezione di un punto P di S_4 fuori di Γ_3), determinato da una retta passante per esso colla sua traccia e col suo punto di fuga; e come spazio direttore lo stesso spazio Γ_3 , il quale appartiene anche a Σ_4 . Le proprietà che hanno luogo fra gli elementi traccie e di fuga si dimostrano direttamente in R_3 con quelle delle rette e dei piani paralleli.

Osservando che ogni punto A' di Σ_4 in R_3 determina con un punto traccia S una retta il cui punto di fuga Q' non cade in S , e che ciò avviene soltanto quando S cade in A' ; si vede che l'insieme delle rette le cui traccie e punti di fuga coincidono in R_3 , ha tutte le proprietà di una stella di 2^a specie; e quindi si può dire che esse si incontrano in un punto improprio (corrispondente al centro di proiezione).

Ogni punto di R_3 rappresenta così ∞^3 punti, ogni retta ∞^2 rette, ogni piano

∞^3 piani, e lo spazio R_3 stesso rappresenta lo spazio Γ_3 , e ∞^4 altri spazi a tre dimensioni di Σ_4 determinati dalle coppie di piani paralleli di R_3 .

Se le traccie e gli elementi di fuga coincidono, allora si tratta di rette, piani e spazi a tre dimensioni passanti pel punto corrispondente al centro di proiezione. Se, ad esempio, le traccie e i punti di fuga delle rette di Σ_4 , rappresentate da rette di R_3 , cadono all'infinito, allora esse si chiamano *parallele* allo spazio Γ_3 .

Due, tre, quattro punti indipendenti di Σ_4 determinano rispettivamente una retta, un piano e uno spazio a tre dimensioni.

Per le proprietà metriche basta costruire direttamente in R_3 colla sfera delle distanze un sistema polare che sia la proiezione del sistema polare ortogonale di 2^o grado intorno al centro di proiezione.

Se si considera Σ_4 indipendentemente da R_3 , applicando l'intuizione spaziale in ogni spazio Σ_3 di essa, immaginando cioè il piano di fuga di Σ_3 all'infinito, si ha precisamente lo spazio S_4 .

Ogni proprietà di Γ_3 , dimostrata per mezzo dei postulati dati e della proposizione che in S_4 esiste un punto fuori di ogni spazio S_3 , si dimostra in Σ_4 cogli stessi postulati e colla stessa proposizione data per definizione.

Ciò che vale fra S_4 e S_3 , vale evidentemente anche fra S_n e S_{n-1} , e quindi anche fra S_n e S_3 .

Da questa costruzione risulta pure quanta utilità si abbia anche per le applicazioni da S_n in S_3 nel considerare come spazio a quattro dimensioni S_4 anzichè una sua rappresentazione Σ_4 in S_3 stesso; specialmente perchè in S_4 i punti, le rette, i piani, ecc., ce li immaginiamo tutti allo stesso modo, come nello spazio ordinario.

Dalle parole citate della pag. xxxiii e della pag. 612, e da quelle sopra ricordate, risulta invece che fatta astrazione dall'intuizione, dallo spazio S abbiamo una varietà Σ determinata da infiniti elementi indipendenti, e da ogni spazio S_n una varietà Σ_n contenuta in Σ . E le proposizioni che si ottengono dagli assiomi suddetti servono a stabilire le proprietà proiettive e metriche di ogni varietà Σ_n . Queste varietà possono essere trattate indipendentemente dall'intuizione o dagli assiomi suddetti sia col metodo sintetico sia col metodo analitico, partendo dai gruppi di elementi.

Se vi è dunque un vantaggio nella deduzione da Σ_n a Σ_3 , vi è pure lo stesso vantaggio (passando coll'intuizione allo spazio S in base agli assiomi stabiliti) da S_n a S_3 . Infatti, gli assiomi di S_3 , e così quelli di S_n , considerando questo come dato, servono a stabilire, avendo riguardo al metodo analitico, un sistema di coordinate in modo che S_3 e S_n corrispondono perfettamente a Σ_3 e Σ_n , e inversamente. Cosicchè, ad ogni proprietà P dedotta da S_n in S_3 corrisponde una proprietà Π dedotta da Σ_n e Σ_3 , che interpretata geometricamente si muta nella P . E siccome per stabilire la corrispondenza fra S_3 e Σ_3 bastano i po-

stulati dello spazio ordinario, così la proposizione P si può dimostrare con essi soltanto.

Inversamente, dalla varietà Σ_n , applicando l'intuizione spaziale in ciascuna delle sue varietà lineari Σ_3 , si giustifica la proposizione: esiste un punto fuori dello spazio ordinario. E considerando poi anche in questo caso lo spazio S_n , così ottenuto come dato, diamo con un'ipotesi la proposizione suddetta.

Qualunque siano le definizioni corrispondenti alle ipotesi di S , ciò non significa che la proprietà P non possa essere dedotta dai postulati di S_3 , senza ricorrere a quelle definizioni ⁽⁸⁾. Ma se così fosse sarebbe maggiormente dimostrato il vantaggio della geometria a più di tre dimensioni quale metodo di ricerca in S_3 , sebbene essa non sia in sé un metodo, perchè essa ha teoricamente lo stesso diritto di esistenza della geometria ordinaria.

La mia rappresentazione del tutto geometrica dell'iperspazio si può applicare adunque ad ogni varietà di elementi, come ad ogni varietà geometrica a più di tre dimensioni, che soddisfi ai miei assiomi.

Quando al resto della lettera del direttore della *Rivista* mi limito ad osservare che l'appunto che egli fa al 2° esempio della 4ª nota della pag. xxviii del mio libro nulla dimostra contro la mia osservazione, espressa sotto forma di opinione, sullo svolgimento di un sistema di proprietà astratto; osservazione di metodo che d'altronde, come risulta dal brano di cui fa parte quello riportato dal sig. Peano, nulla ha a che fare col corpo del mio libro. In esso poi non vi è alcuna confusione fra ipotesi e definizioni ⁽⁹⁾.

Osservo ancora che nel mio libro si trova una risposta anche a parte della domanda del prof. Peano, che riguarda un appunto di metodo fatto a pag. 608 al suo opuscolo sui principi della geometria; appunto del resto secondario rispetto alla stessa critica da me fatta all'applicazione della logica deduttiva alla matematica ⁽¹⁰⁾.

Padova, 29 febbrajo 1892.

G. VERONESE.

⁽¹⁾ Queste osservazioni sarebbero state pubblicate molto prima se l'Autore non fosse stato colpito da una recente e grave sventura domestica.

⁽²⁾ Vol I, fasc. 3°-4°, 5°-6°, 1891.

Chiamai questa teoria nel senso da me inteso perchè in quell'articolo il prof. Segre si era riferito genericamente nei punti che diedero luogo a quelle osservazioni ad alcuni miei precedenti lavori (l. c. pag. 58 e seg.), e perchè il prof. Peano accennò alla « teoria degli spazi a quattro e più dimensioni ove si supponga che i punti dell'iperspazio siano tali e quali ce li immaginiamo nello spazio ordinario » (*Rivista* pag. 67).

⁽³⁾ Padova, Libreria e Tipografia del Seminario.

⁽⁴⁾ Linee 21-32 della pag. xxxiv, linee 1-2 della pag. xxxv e la 3ª nota della pag. xxxiv.

Linee 28-33 della pag. xxxiii e 11-14 della pag. 612.

Specialmente nelle linee 11-21 della pag. xiv e 13-23 della pag. xv si può trovare una risposta a quanto disse il direttore della *Rivista* sulle ipotesi matematiche (*Rivista* p. 67), come pure alle sue considerazioni sul rigore matematico (ib. pag. 66-67) nella prefazione a pag. xxxviii e xxxix e in principio dell'appendice.

⁽⁵⁾ L'affermazione del sig. Peano è questa: « Ogni proposizione dimostrata a vera servendosi dello spazio a quattro dimensioni (cioè del postulato: esistono punti « fuori dello spazio ordinario) cessa di valere nello spazio a tre, perchè non si è « dimostrata conseguenza dei soli postulati della geometria elementare ». E così: « la geometria a tre dimensioni non può aiutare quella a due ».

Il *cessa di valere* non deve essere qui interpretato nel senso che « non è più « vera » o « non è conseguenza logica dei postulati dello spazio ordinario o del piano » ma nel senso che « può non essere più vera », sebbene sia compatibile con quei postulati.

Nessun esempio egli ha dato di proposizioni dedotte da S_4 in S_3 o da S_3 in S_2 che *cessino di valere* in S_3 o in S_2 , quando i postulati di S_3 e di S_2 sono quelli comunemente ammessi per definirli corrispondentemente alla rappresentazione che abbiamo già di essi.

Del resto io stesso avevo preveduto l'obiezione suddetta e avevo anche accennato ad una risposta in una nota della mia Memoria « *La superficie omaloide normale del 4° ordine, ecc.* » (Atti della R. Acc. dei Lincei, 1884, pag. 2).

Egli ammette però (*Rivista* p. 157) che vi è un grande vantaggio nel passare da una varietà analitica di n variabili ad una di minori dimensioni.

⁽⁶⁾ Ciò del resto non esclude che come geometria a più dimensioni si possa poi anche chiamare la teoria di sistemi continui di enti geometrici che non siano punti, ma già costruiti nello spazio generale (pag. xxxiii).

⁽⁷⁾ A. Geom. descrittiva a quattro dimensioni (Atti del R. Istituto Veneto, 1882).

⁽⁸⁾ Ciò non succede almeno per molte proposizioni.

⁽⁹⁾ Nella prefazione ho usato talvolta questi nomi per indicare che autori diversi procedono per definizioni o per ipotesi per stabilire un dato sistema astratto di proprietà.

⁽¹⁰⁾ Pref. pag. xxiv lin. 23-31. Ho detto già in principio dell'appendice che nella lettura di questa parte complementare bisogna tener conto delle considerazioni generali svolte nella prefazione; come per alcuni lavori occorre tener conto delle osservazioni fatte ad altri, che sotto qualche aspetto entrano nella stessa categoria.