Rendic. Circolo matem. Palermo, 6, 1892, pp. 73-76
19)



# OSSERVAZIONI SOPRA UNA DIMOSTRAZIONE CONTRO IL SEGMENTO INFINITESIMO ATTUALE;

di **G. Veronese**, in Padova.

Adunanza del 22 maggio 1892.

Il prof. Peano ha pubblicato nel fascicolo di marzo della *Rivista di Matematica* una dimostrazione contro il segmento infinitesimo attuale, assicurando che essa è lo sviluppo di quella data dal sig. G. Cantor (*).

Nella nota a pag. 105 dei miei « *Fondamenti di Geometria* » (**) ho discussa questa dimostrazione, pur avendola dichiarata incompleta non risultando da essa il concetto preciso dell'autore.

---

(*) Zeitschr. für Phil. v. Fichte, vol. 91, fasc. I, pag. 112, 1887; od anche: Zur Lehre von Transfiniten. Halle, 1890.

Il teorema enunciato da Cantor è questo:

« Non vi sono grandezze numeriche lineari $\zeta$ diverse da zero (vale a dire « grandezze numeriche tali che hanno per immagine dei segmenti *continui* limitati) « che siano minori di ogni grandezza numerica finita ».

Egli dice di essere giunto a darne la dimostrazione mediante « *certi teoremi dei numeri transfiniti* ».

Il continuo è qui inteso naturalmente nel senso ordinario, il quale, come si sa senza ricorrere ai numeri transfiniti, soddisfa all'assioma V d'Archimede, che esclude appunto gli infinitesimi fra i segmenti limitati.

(**) Libreria e Tipografia del Seminario ... Padova ...

Rend. Circ. Matem., t. VI, pale 19 - 1892

La dimostrazione della *Rivista* si riduce in fondo agli ultimi periodi (*). Sebbene in essa non si parli della mia teoria degli infi-

---

(*) l. c. pag. 58-62. La dimostrazione suddetta consiste semplicemente in ciò. Considerato a partire da un punto $O$ sulla retta in una data direzione un segmento $u$ (indipendente però dal postulato del continuo), l'insieme di tutti i segmenti multipli di $u$ secondo un numero intero finito viene indicato con $\infty u$, e viene chiamato segmento d'ordine infinito.

Questo segmento rappresenta l'intera retta a partire da $O$, se non vi sono segmenti infinitesimi.

Se $u$ è infinitesimo rispetto a $v$ (vale a dire che ogni multiplo di $u$ secondo un numero intero e finito è minore di $v$) naturalmente $\infty u$ appartiene a $v$, considerando $u$ e $v$ a partire da $O$ nella direzione data.

Per somma di due segmenti $u$ e $v$ terminati o no si definisce il segmento luogo degli estremi di tutti i segmenti che si ottengono sommando due segmenti terminati l'uno ad un punto di $u$ e l'altro ad un punto di $v$, coll'origine $O$. E la somma dei segmenti terminati s'intende eseguita nel senso ordinario.

Da questa definizione (senza bisogno di *alcun* teorema dei numeri transfiniti del sig. C a n t o r, ma della sola loro formazione) si ha subito che $(\infty+1)u=\infty u$, $2\infty u=\infty u$ ecc., e che per ciò con una moltiplicazione coi numeri suddetti (indicati invece da C a n t o r coi simboli $\omega$, $\omega+1$, ... $2\omega$ ecc.) da $u$ non si ottiene $v$. D'altronde è ovvio che $\infty u$ per la definizione data è illimitato.

Per ciò solo la *Rivista* afferma l'impossibilità del segmento infinitesimo attuale.

Aggiungo un'altra osservazione *indipendente* dai miei infiniti e infinitesimi.

Il direttore della *Rivista* dice: « Risulta che il segmento $\infty u$ quantunque « compreso nel segmento $v$, non può essere terminato, perchè se ad un segmento « terminato si aggiunge il segmento $u$, ovvero si raddoppia, si avrà un nuovo « segmento maggiore del primo »; vale a dire non valgono per i segmenti terminati le uguaglianze suddette.

Ma queste uguaglianze non dipendono dalle proprietà dei numeri transfiniti del sig. C a n t o r, pei quali come si sa è $\omega+1>\omega$, $2\omega>\omega$ ecc., ma dal considerare appunto $\infty u$ come illimitato.

Il sig. C a n t o r stesso ha supposto in altro luogo (l. c. lett. II) che il segmento $\omega u$, essendo $u$ un segmento terminato $(AA')$ preso come unità, sia rappresentato invece a partire da $A$ sulla retta in una data direzione da un segmento $(AO)$ limitato in un punto $O$ (« actualunendliche Linie $AO$, die ihren Ziehlpunkt $O$ in Unendlichen hat » . . . « während alle anderen Punkte $M$, $A$, $B$ der Geraden $AO$ um ein gleiches Stück $MM'=AA'=BB'$ nach links gezogen werden, *allein der Unendlich ferne Punkt $O$ fest an seinem Platze bleibt* ». Veggasi la mia citata nota a pag. 105 del mio libro).

Il numero $\omega+1$ (non già $1+\omega=\omega$) viene quindi rappresentato dal seg-



niti e infinitesimi, trattandosi di una dimostrazione di C a n t o r credo opportuno di far rilevare che non solo le considerazioni accennate nella nota anzidetta, ma eziandio le prime definizioni stesse dei miei segmenti infiniti e infinitesimi (pag. 84 e segu.), la rappresentazione geometrica che ho dato di una parte del continuo assoluto nella nota a pag. 166, e i simboli dei miei numeri infiniti e infinitesimi servono senz'altro a dimostrare come non sia applicabile al mio segmento infinitesimo attuale l'interpretazione data dalla *Rivista* alla detta dimostrazione, e da me del resto preveduta nella nota citata.

Come la geometria non Euclidea e quella a più di tre dimensioni sia nel senso analitico che in quello puramente geometrico sono da ritenersi ormai fuori di questione, così è del segmento infinitesimo attuale. Ma occorre naturalmente che si esamini senza preconcetti che cosa io intendo per un tale ente. Nel mio libro, quando si è trattato di importanti controversie, ho ritenuto necessario di svolgere ampiamente le mie idee confutando poi sia nelle frequenti note del testo, sia nell'Appendice le obiezioni principali contro di esse, o facendo vedere che se queste obiezioni valevano per altri autori non valgono per me (*). E nell'appendice (pag. 611-615) ho fatto rilevare appunto i difetti di alcune dimostrazioni od osservazioni matematiche contro l'infinito e l'infinitesimo attuale.

Le applicazioni degli infiniti e infinitesimi, che ho fatte nel mio libro alla geometria, sia per collegare in un solo sistema quelli di E u c l i d e e di R i e m a n n e servirmi di questo nella trattazione del primo, sia per stabilire una geometria indipendente dall'assioma V

---

mento $(AO)+(OO_1)=(AO_1)$, essendo $(OO_1)=(AA')$, ecc. In tal caso preso come segmento $v$ il segmento terminato $(AO)$ stesso, $\omega u$(opp $\infty u$)$=v$, $(\omega+1)u>v$, essendo anche in questo caso $u$ infinitesimo attuale rispetto a $v$, senza che siano soddisfatte le uguaglianze $(\infty+1)u=\infty u$ ecc.

Non vale però incondizionatamente la legge commutativa della somma, perchè ad es. si ha $1+\omega=\omega<\omega+1$, come vale invece pei miei infiniti e infinitesimi. Non è dunque collo sviluppo dato dalla *Rivista* alla dimostrazione di C a n t o r ma ricorrendo alla legge commutativa della somma che viene escluso anche in tal caso l'infinitesimo costante.

(*) Leggasi a tal proposito la nota a pag. VI.

d'Archimede, che chiamai assoluta, servono anche di conferma alla teoria suddetta.

Ma, come avvertii nella prefazione, nelle note indicate con numeri romani, che accompagnano il testo della prima parte, trattai pure la geometria senza gli infiniti e infinitesimi, allo scopo di mostrare la utilità di questi, che si rende più manifesta nello studio degli spazi a tre e a più di tre dimensioni, come pure per agevolare la soluzione del problema didattico (*).

Padova, 14 maggio 1892.

G. VERONESE.

---

(*) Vedi pag. XXXVI e XXXVII.